

# Übung Theo Inf

## Blatt 1

# THEO/INF

### Aufgabe 1

a,  $G_A = \{(0,0), (1,0)\}$  c,  $\odot$   $\odot$   $\odot$   $G_C = \{f\} = G_C \cdot e, 0 \odot$   
 b, nur Total mit Wertemenge  $\{0,1\}$  → Element wird abgespeichert  
 d, nur doppelte belegg nicht möglich f, nur am Ansch probiers aus der Loggen

### Aufgabe 2

vgl. eigenes Blatt

### Aufgabe 3

def divTwo(x):

i = 0

while (L[i] <= x):

i = i + 1

i = i - 1

if (i < 0):

i = 0

return i

def bin(n)

a = 0

if (n > 0):

if (divTwo(n) > 0):

a = bin(divTwo(n))

print((n - (divTwo(n)))

else:

print(0)

return -1

rekursive Lösung

iterative Lösung

Siehe eigenes Blatt

## Blatt 2

siehe Lösung

## Blatt 3

### Aufgabe 1

| dezi | bin     | dya   | 3adisch |
|------|---------|-------|---------|
| 35   | 100011  | 11211 | 322     |
| 49   | 110001  | 21121 | 1211    |
| 83   | 1010011 | 12121 | 2232    |
| 127  | 1111111 | 11111 | 11131   |

$\text{bin}(35) = \text{bin}(17)1 = \text{bin}(8)11 = \text{bin}(4)011 =$   
 $= \text{bin}(2)0011 = \text{bin}(1)00011 = 100011$   
 $\text{dya}(35) = \dots = \text{dya}(8)11 = \text{dya}(3)211 =$   
 $= \text{dya}(1)1211 = 11211$   
 $\text{ad}_3(35) = \text{ad}_3(11)2 = \text{ad}_3(3)22 = 322$

### Aufgabe 3

$(z_0, 1) \rightarrow (z_0, 1, R)$  // nach rechts bringen falls 1

$(z_0, 2) \rightarrow (z_0, 2, R)$  // oder falls 2

$(z_0, -) \rightarrow (z_0, 1, 0)$  // bei der ersten Stelle eine 1 schreiben & Beginn beenden

### Aufgabe 4

### Aufgabe Z1

$k \in \mathbb{N}^+$ ,  $Z_i \in \text{ack. Mengen}$ ,  $k$ -TM ist  $(Z, Z, f, z_0, z_1)$ ;  $s = |Z|$ ,  $r = |Z|$

$r$  Mögl. für Wahl von  $z_0$  und  $r$  für  $z_1$

$f: (Z - \{z_1\}) \times Z^k \rightarrow Z \times Z^k \times \{L, O, R\}^k$  totale Funktion  $(f: A \rightarrow B)$

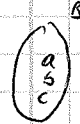
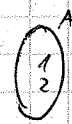
Wieviele totale Funktionen  $f: A \rightarrow B$  g. d. a.?

$$\Rightarrow \text{Anzahl TM: } r^2 \cdot |B|^{111} =$$

$$= r^2 \cdot (r \cdot s^k \cdot 3^k)^{(r-1) \cdot s^k}$$

$$|A| = (r-1) \cdot s^k$$

$$|B| = r \cdot s^k \cdot 3^k$$



aa ab ac  
ba bb bc  
ca cb cc

also  $3^3 = |B|^{111}$  Mögl.

## Blatt 4

### Aufgabe 3

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ;  $g$  gerade,  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gerade mit  $W_h = W_f \cup W_g$  |  $W_h \subseteq W_f \cup W_g$   
 Los:  $h(x) = \begin{cases} f(\frac{x}{2}) & \text{falls } x \text{ gerade} \\ g(\frac{x-1}{2}) & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow$  berechenbar | siehe eigene Abgabe (0.0)

### Aufgabe 4

$A, B \in RE \Rightarrow A \cap B \in RE$ : Sei  $A, B \in RE \Rightarrow A, B$  berechenbar, also  $\chi_A, \chi_B$  berechenbar  
 Dann:  $\chi_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_A(x) + \chi_B(x) = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow A \cap B$  rekursiv berechenbar  $\Rightarrow A \cap B \in RE$

## Blatt 5

### Aufgabe 1

$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (f(\pi_1(x)) - f(\pi_2(x))) \in \mathbb{N} \\ f(\pi_1(x)) - f(\pi_2(x)) & \text{sonst} \end{cases}$   $W_f = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Primzahl } n\}$   
 $W_h = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n = f(\pi_1(x)) - f(\pi_2(x))\} = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Prim } p, q \geq 2 \text{ mit } n = p - q\}$   
 $W_h = \mathbb{N}$  (1.6.7)

### Aufgabe 2

$K = \{(x, y) \mid M_x \text{ h\"olt bei Eingabe } y\}$   $K$  aufz\"uhlen  $\Leftrightarrow K$  semirekursiv  $\Leftrightarrow \chi_K$  berechenbar  
 def.  $\chi_K(x, y)$   $K$  aufz\"uhlen: nicht entscheidbar.  
 Simuliere  $M_x$  bei Eingabe  $y$   $K_0(x) = \{x \mid M_x \text{ h\"olt bei Eingabe } x\}$   
 return 1  
 Angenommen:  $K$  w\"are entscheidbar  $\Rightarrow \chi_K$  berechenbar. Dann auch  $f(x) := \chi_K(x, x)$  berechenbar.  
 Behauptung:  $f = \chi_{K_0}$  Beweis:  $x \in K_0 \Rightarrow M_x$  h\"olt bei Eingabe  $x \Rightarrow (x, x) \in K$   
 $\Rightarrow \chi_K(x, x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$  oder (negiert)  $x \notin K_0 \Rightarrow M_x$  h\"olt nicht  $\Rightarrow (x, x) \notin K \Rightarrow \chi_K(x, x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$   
 $\Rightarrow f = \chi_{K_0} \Rightarrow K_0$  entscheidbar  $\nabla$

### Aufgabe 3

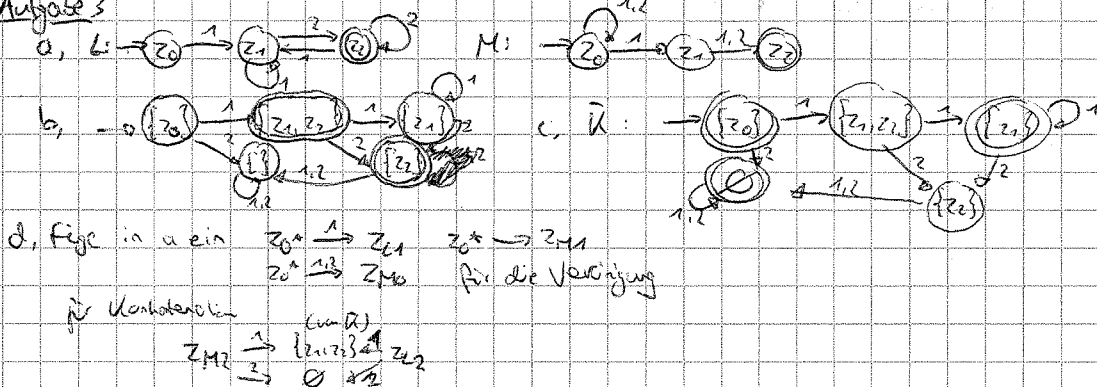
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  beliebig.  $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert } m \text{ mit } f(m) \text{ def. und } f(m) \geq n\}$ .  
 Ist  $W_f$  endlich, dann auch  $A_1$  endlich n\"amlich  $A_1 = \emptyset$  oder  $A_1 = \{0, 1, \dots, \max W_f\}$  und damit entscheidbar.  
 Ist  $W_f$  nicht endlich, dann  $A_1 = \mathbb{N}$  (weil  $W_f$  unbeschr\"ankt) und damit entscheidbar.
- $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert Prim } p, q \geq 2 \text{ mit } n = pq\}$  entscheidbar  $\Leftrightarrow \chi_{A_2}$  berechenbar  
 Algorithmus: Eingabe  $n$ . Liste aller Prim  $\leq n$ , for  $p, q$  in  $L$ : if  $pq \geq n$  return 1, return 0
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  berechenbar.  $A_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 4\}$   $A_3 = W_f \Rightarrow A_3$  aufz\"uhlen (2.7.0)
- Satz von Rice  $\emptyset \neq S \subsetneq \{f \mid f \text{ berechenbar f\"ur } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$   
 $I(S) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{die von } M_f \text{ berechnete } W_f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ liegt in } S\}$  ist unentscheidbar  
 $A_4 = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid M_f \text{ terminiert f\"ur } g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = x^2\}$ . Setze  $S := \{g\}$  mit  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = x^2$   
 Dann gilt  $I(S) = A_4$ , also  $A_4$  unentscheidbar, (Satz,  $g$  berechenbar,  $S$  nicht Teilmenge der berechenbaren Fkt.)
- $A_5 = \{i \in \mathbb{N} \mid M_i \text{ h\"olt auf mind. 3 Eingaben aus } \mathbb{N}\}$   
 $S := \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ berechenbar und } |A_f| \geq 3\}$ ,  $S \neq \emptyset$  (wegen  $h(x) = 0 \in S$ );  $(g(x) = \text{n.d.}) \notin S$   
 $I(S) = A_5$  Rice  $\Rightarrow A_5$  nicht entscheidbar

## Blatt 6

### Aufgabe 2

Mein Fehler: Zust\"ande, wenn  $a$  nicht weiter f\"uhrt, dann  $\rightarrow z_1$

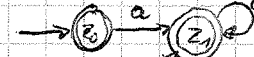
### Aufgabe 3



# Übung TheoInf - Mitschrift

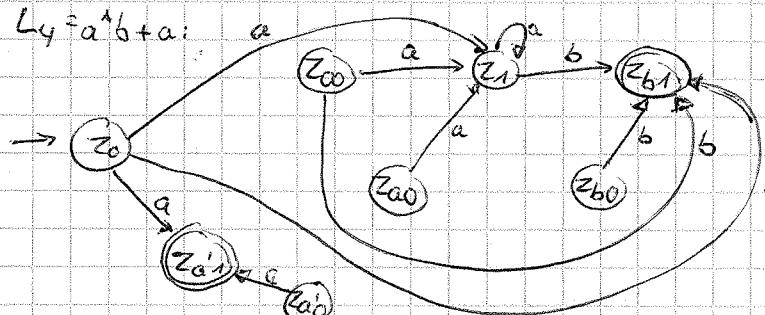
Blatt 07

Aufgabe 1:  $L_0 = a$ :   $L_1 = b$ : 

$L_2 = a^*$ : 

$L_3 = a^*b$ : 

TODO: Blatt 09

$L_4 = a^*b + a$ : 

zu Aufgabe 2:  $L_{z_0} := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(z_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$

Zusatzaufgabe 2: Minimierung von RAMS

$M_0, M_1$  eine Codierung der RAMs.  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(i) = \min \{j \in \mathbb{N} \mid M_i \text{ und } M_j \text{ berechnen die gleiche Funktion}\}$

$\Rightarrow f$  muss total sein, da  $f(i) \neq \emptyset$

$f \in \text{RAM}$ : Beweis

Angenommen  $f$  berechenbar. Sei  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  die von  $M_0$  berechnete Funktion ( $g$  Identitätsfunktion).  $S = \{g\}$ , also ist  $S \neq \emptyset$  und  $S \in \text{RAM}$

$\Rightarrow$  S.v.R:  $I(S) \notin \text{REC}$ :  $I(S) = \{i \mid \text{die von } M_i \text{ berechnete Funktion liegt in } S\}$   
 $= \{i \mid M_i \text{ berechnet } g\}$

folgender Algo entscheidet  $I(S)$ :

Eingabe:  $i$   
 if  $f(i) = 0$ , then return 1  
 else return 0

$\left( \begin{array}{l} i \in I(S) \Rightarrow M_i \text{ berechnet } g \\ \Rightarrow M_0 \text{ berechnet gleiche Funktion wie } M_i \\ \Rightarrow f(i) = 0 \Rightarrow \text{Algo return 1} \end{array} \right. \mid \left. \begin{array}{l} i \notin I(S) \Rightarrow M_i \text{ berechnet nicht } g \\ \Rightarrow M_0 \text{ berechnet andere Funktion als } M_i \\ \Rightarrow f(i) > 0 \Rightarrow \text{Algo return 0} \end{array} \right)$   
 $\Rightarrow I(S)$  entscheidbar  $\notin$  S.v.R.

—  $A_g = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{die von } M_i \text{ berechnete Funktion } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ ist total und s.H. ~~stetig~~ fortlaufend}\}$   
 $A_g \notin \text{REC}$

Nutze S.v.R.  $S = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist total und s.H. fortlaufend}\} \rightarrow S \neq \emptyset$   
 $\Rightarrow I(S) = \{i \mid \text{die von } M_i \text{ berechnete Funktion liegt in } S\} \notin \text{REC} \rightarrow S \notin \text{RAM, da ex. z.B. } M_i$   
 $\parallel$   
 $A_g = \emptyset$

Blatt 08

Aufgabe 1:  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(x, t) = \begin{cases} x, & \text{falls } M \text{ bei Angabe } x \text{ nach } t \text{ Schritten h\ddot{a}lt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$   
 $\Rightarrow W_i \in D_g$

Wenn  $x \in D_g$ :  $\exists t \in \mathbb{N}: f(x, t) \in W_h \Rightarrow 0_g \leq W_f \Rightarrow 0_g = W_i$

$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $h(x) = f(\pi_1(x), \pi_2(x))$  mit  $\pi_1(\pi_1(x), \pi_2(x)) = x$  (2.68)

Sei  $y \in W_h \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: h(x) = y = f(\pi_1(x), \pi_2(x)) \in W$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow y \in D_g$ ;  $y > 0$ :  $y = f(\pi_1(x), \pi_2(x))$  und  $M$  h\ddot{a}lt nach  $\pi_2(x)$  Schritten  $\Rightarrow y \in D_g$

$\Rightarrow D_g \in W_h \parallel$  Sei  $x \in D_g \Rightarrow M$  h\ddot{a}lt nach  $t$  Schritten  $\Rightarrow$  ~~W~~  $t$

### Aufgabe 1 Nicht-deterministischer Kellerautomat

$\Gamma: z_0 a \rightarrow z_0 \oplus \square; z_0 a \oplus \rightarrow z_0 \oplus \oplus; z_0 b \oplus \rightarrow z_0 \oplus \oplus; z_0 b \oplus \rightarrow z_0 \oplus \oplus$   
 $z_0 a \oplus \rightarrow z_1 \oplus; z_0 a \oplus \rightarrow z_1 \oplus; z_1 a \oplus \rightarrow z_1 \oplus; z_1 b \oplus \rightarrow z_1 \oplus; z_1 \oplus \rightarrow z_1 \oplus$   
 $K = (\{a, b\}, \{0, \oplus, \square, \Gamma, \{z_0, z_1\}, z_0)$

### Aufgabe 2

$G = (\Sigma, N, S, R), \Sigma = \{a\}, N = \{S, A, V, E\}$

$R: S \rightarrow VS, E \rightarrow a, S \rightarrow E, A \rightarrow a, VE \rightarrow AE, VA \rightarrow AAV$

$\Rightarrow$  so nicht kontextsensitiv

$\Rightarrow$  Ersetze  $VA \rightarrow AAV$  durch  $VA \rightarrow D_1 A, D_1 A \rightarrow D_1 D_2, D_1 D_2 \rightarrow A D_2, A D_2 \rightarrow AAV$

$N \neq D_1, D_2$

### Aufgabe 3

```

1 def a(x, y, z):
2     if x < 0 or y < 0 or z < 0:
3         return false
4     if y == 0 or x == 1
5         return z == 1
6     if y == 1 or x == 0 or x == z
7         return x == z
8     p = 1
9     for i in range(1, y+1):
10        if p > z:

```

Laufzeit: (2)-(7): Konstant, kann von jeder Multiplikation  $p \neq x$  gilt  
 $p \leq z$  und  $x \leq z$ . Jede Multiplikation benötigt also höchstens  $2 \cdot |z|$  Schritte  
 $\in O(n)$ . Da von Beginn der Schleife  $x \geq 2$ , gilt in jeder Multiplikation  
 $2 \leq p \leq z$ . Die Multiplikation wird also max.  
 $\log_2 z \in O(\log z) \leq O(n)$  mal durchgeführt. Gesamtlaufzeit  
 $O(n^2)$

### Aufgabe 4

# Liste aller Perm. von  $[0, n-1]$

def perm(n):

if n < 1:

return [[0]]

r = []

for p in perm(n-1):

for i in range(0, n):

r += [p[0:i] + [n-1] + p[i:n-1]]

return r

def tsp(n, K, k):

for p in perm(n):

~~laenge = sum(K~~

laenge =

= sum(K[p[i]p[i+1]] / 1]

for i in range(n):

if laenge < k:

return 1

return 0