

Satz 5.46 CLIQUE ist NP-vollständig

Beweis

- CLIQUE $\in$ NP nach Eigenschaft 5.17
- CLIQUE $\leq$ 3SAT (aus 5.35 folgt dann NP-Vollständigkeit)

Sei $F = F(x_1, \dots, x_n)$ eine 3CNF-Formel mit Variablen $x_1, \dots, x_n$
 $F = K_1 \wedge K_2 \wedge \dots \wedge K_k$ für Klauseln $K_1, \dots, K_k$

Stelle sich K_i als Menge mit max. 3 Literalen vor:

Für Literal $\ell \in \{x_1, \dots, x_n, \neg x_1, \dots, \neg x_n\}$ sei $\bar{\ell}$ = negierter Literal

$\begin{cases} x_i & \text{falls } \ell = x_i \\ \neg x_i & \text{falls } \ell = \neg x_i \end{cases}$

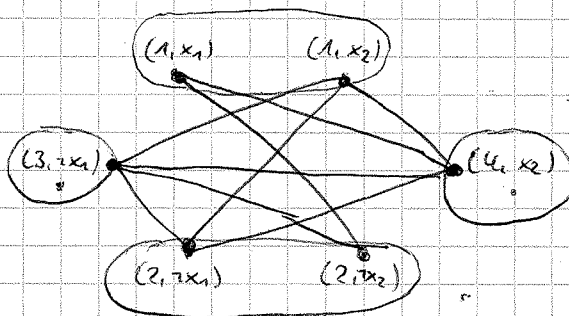
Konstruiere ungerichteten Graphen $G_F = (V, E)$ wie folgt:

$V = \{(i, \ell) \mid i \in \{1, \dots, k\} \text{ und } \ell \in K_i\}$ d.h. $(i, \ell) \in V \Leftrightarrow \ell$ ist Literal in K_i

$E = \{(i, \ell_1), (i, \ell_2) \mid (i, \ell_1) \wedge (i, \ell_2) \text{ ist falsch}\}$, d.h. Kanten zwischen Literalen verschiedener Klauseln, ~~die~~ ^{weil} die Lit-ale nicht widersprechen

Beispiel: Formel: $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1) \wedge (x_2)$

Graph:



- Eine Clique in G_F hat höchstens die Größe k , denn innerhalb einer Klausel gibt es keine Kante
- Falls $\langle F \rangle \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung von $x_1, \dots, x_n$, sodass in jeder Klausel K_i mindestens ein Literal ℓ_i wahr ist.
 $C = \{(i, \ell_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ ist eine Clique der Größe k im Graphen G_F , denn für $i \neq j$ gilt $\ell_i \neq \bar{\ell}_j$ (sonst wären ℓ_i und ℓ_j nicht gleichzeitig wahr)
- Falls G_F eine Clique C der Größe k enthält, so gilt
 $C = \{(i, \ell_i), \dots, (k, \ell_k)\}$ und $\ell_i \neq \bar{\ell}_j$ für $i \neq j$
 D.h. x_i und $\neg x_j$ treten nie gleichzeitig auf in C . Also gilt:
 $F(b_1, \dots, b_n) = 1$ für folgende Belegung:
 $b_i = \begin{cases} 1 & x_i \in \{\ell_1, \dots, \ell_k\} \\ 0 & \neg x_i \in \{\ell_1, \dots, \ell_k\} \text{ oder sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Damit gilt: $\langle F \rangle \in 3SAT$

$\Rightarrow f(\langle F \rangle) = (\langle G_F \rangle, k)$ gilt $f \in FP$

und $\langle F \rangle \in 3SAT \Leftrightarrow f(\langle F \rangle) \in CLIQUE$

$\Leftrightarrow 3SAT \leq CLIQUE$

$\Leftrightarrow CLIQUE$ ist NP-vollständig

