

REPETITORIUM

Aufgabe 3:

n	$\text{bin}(n)$	$\text{dya}(n)$	$\text{ad}_2(n)$	$\text{ad}_3(n)$
16	10000	1112	1112	121
0	0	ϵ	ϵ	ϵ
		12211	12211	
61	1 1			1321

Aufgabe 4:

$(x_1, \dots, x_n)$	$\text{bin}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$
(1)	10 1001
(1, 2)	10 11 10 11 00 10
(1, 2, 3)	" " " " 11 11 10
ungültige Liste	10 10 ...
(1, 19)	10 11 10 1100001111 10

Aufgabe 7:

b) $x \in \{a, b\}$

$$(z_0, x, \square) \rightarrow (z_0, \square, x, R, R)$$

$$(z_0, \square, \square) \rightarrow (z_0, \square, \square, \square, L)$$

...

Aufgabe 6:

- c)
- 1 $R1 \leftarrow R1 - R0$
 - 2 $R0 \leftarrow 1$
 - 3 IF $R1 > 0$ GOTO 5
 - 4 $R0 \leftarrow 0$
 - 5 STOP

Aufgabe 5:

f2:

- a) Es wird die Multiplikation $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ berechnet

$$f_2(x, y) = x \cdot y$$

- b) Die Schleife wird x -mal ausgeführt, also mindestens

$$2^{|x|} - 1 \text{ und höchstens } 2^{|x|+1} - 2. f_2 \text{ wird also in } O(2^{|x|})$$

$$\text{berechnet, also auch in } O(2^{|x|+|y|}) = O(2^n)$$

Wir zeigen zudem: f2 wird nicht in Poly.zeit berechnet.

Die Schleife wird $\geq 2^{|x|} - 1$ mal ausgeführt. Falls $y = 0$, dann ist $|y| = 0$ und somit wird die Schleife $\geq 2^n - 1$ mal ausgeführt.

Es es. kein Polynom p mit $t = 2^n - 1 \in O(p) \Rightarrow$ nicht Polynomialzeit

≤ 1 :

$$O(\log(x)) = O(\log(2^{|x|})) \\ = O(|x|)$$

Unentscheidbarkeit einer Menge A zeigen:

• Satz von Rice

• Widerspruchsbeweis: C_A berechenbar $\Rightarrow K_{h_0}$ berechenbar

$$\Rightarrow A \in \text{RE} \wedge h_0 \in \text{REC}$$

$$A, B \in \text{REC} \Rightarrow A \oplus B, \bar{A} \in \text{REC} \text{ f. } \oplus \in \{ \cup, \cap, - \}$$

Aufgabe 8:

a) Algo berechnet X_A :

- Eingabe x
 - Simuliere M auf x
 - return 1
- $\Rightarrow D_M \in RE$

M , sodass $M \in REC$

Wähle M_0

Entscheidungs algo. für D_{M_0} :

- Eingabe x
- return x

~~Angenommen $D_M \in REC$ für alle M :~~

~~dann ist C_{M_0} berechenbar~~

~~$\Rightarrow C_{M_0}(x) = C_{M_0}(x)$ berechenbar~~

~~$\Rightarrow$ Widerspruch, C_{M_0} unentscheidbar~~

~~$\Rightarrow D_M$ nicht für jede $M \in REC$~~

Sei M die RAM, die folgendes Programm berechnet.

Eingabe:

Simuliere M_i auf Eingabe i

$\Rightarrow D_M \notin REC$ wäre nämlich C_{M_0} berechenbar,

so wäre auch C_{M_0} berechenbar

def $C_{M_0}(x)$

return $C_{M_0}(x)$

c) $A = \{i \in \mathbb{N} \mid M_i(x) = 5 \text{ f. mindestens ein } x \in \mathbb{N}\} \in RE-REC$

$A \notin REC$: Sei $S = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ berechnet und } 5 \in W_f\} \neq \emptyset$

typischer Fall für den Satz von Rice

S ist echte Teilmenge der berechenbaren Fkt. in $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\xRightarrow{\text{RICE}} REC \not\supseteq I(S) = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{die von } M_i \text{ ber. Fkt. ist in } S\}$
 $= A$

$A \in RE$: Betrachte $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} \times & \text{falls } M_x(y) = 5 \\ n.d. & \text{sonst} \end{cases}$

Es gilt $W_f = A$

Aufgabe 9:

a) $M_a = \{1, 2, 3, 4, 5, 2015\}$

M_a ist endlich

$\Rightarrow M_a$ ist entscheidbar

b) $M_b = \mathbb{N} \setminus \text{PRIM}$

PRIM laut Skript entscheidbar

$\Rightarrow M_b$ (als Komplement von PRIM) ebenfalls entscheidbar

c) $M_c = \{i \in \mathbb{N} \mid \underbrace{i \equiv 1 \pmod{2}}_{i \text{ ist ungerade}}, \wedge \underbrace{M_i \text{ h\"alt bei Eingabe } i}_{i \text{ ist Listenkodierung d. G\"odelisierung von } M_i \text{ und endet auf "10"} \rightarrow \text{gerade Zahl}\}$

$\Rightarrow M_c = \emptyset$

$\Rightarrow M_c$ entscheidbar

d) $M_d = \{i \in \mathbb{N} \mid i + 2^{2015} \in K_0\}$

$K_0 \setminus M_d'$ ist endlich, somit entscheidbar

Wäre $M_d' \in \text{REC}$, so wäre $M_d' \cup (K_0 - M_d') = K_0 \in \text{REC}$ für $M_d' = \{i + 2^{2015} \mid i \in M_d\}$

$\Rightarrow M_d$ unentscheidbar

e) $M_e = \{z \in \mathbb{N} \mid \exists x, y \in \mathbb{N} : z = 22x + 3y\}$

folgender Algo entscheidet M_e

def $M_e(z)$:

for x in range(0, z):

for y in range(0, z):

if $z == 22x + 3y$:

return 1

~~if~~ $z == 0$
return 1

~~else~~
return 0

f) $M_f \notin \text{REC}$ wäre C_{M_f} her., so berechne folgende Algo C_{k_0} .
 def $C_{k_0}(x)$:
 return $C_{M_f}(x, x)$

g) $M_g = \{ \dots \} \in \text{REC}$

h) $x \in k_0 \Leftrightarrow 2^x 3^x 5^0 \in M_n$

$\Rightarrow M_n \notin \text{REC}$

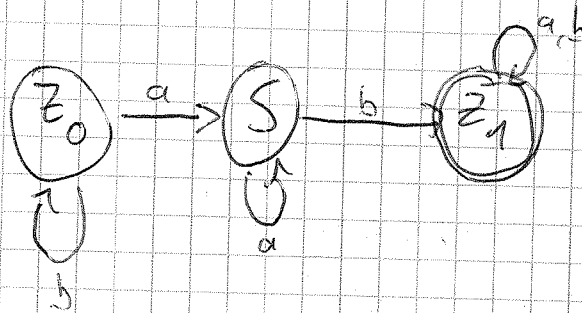
i) $M_i \in \text{REC}$

j) $M_j \in \text{REC}$

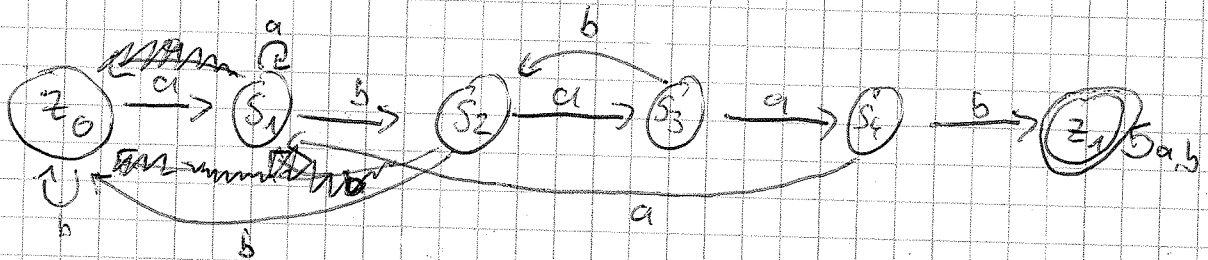
Tag 2

Aufgabe 3:

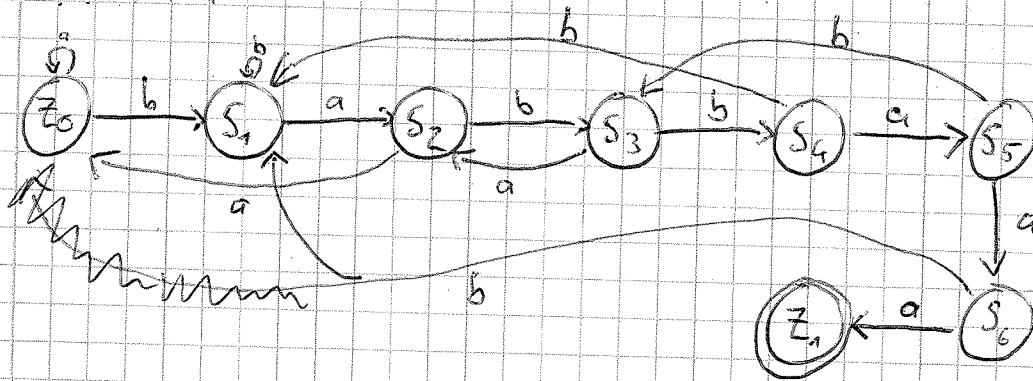
ab



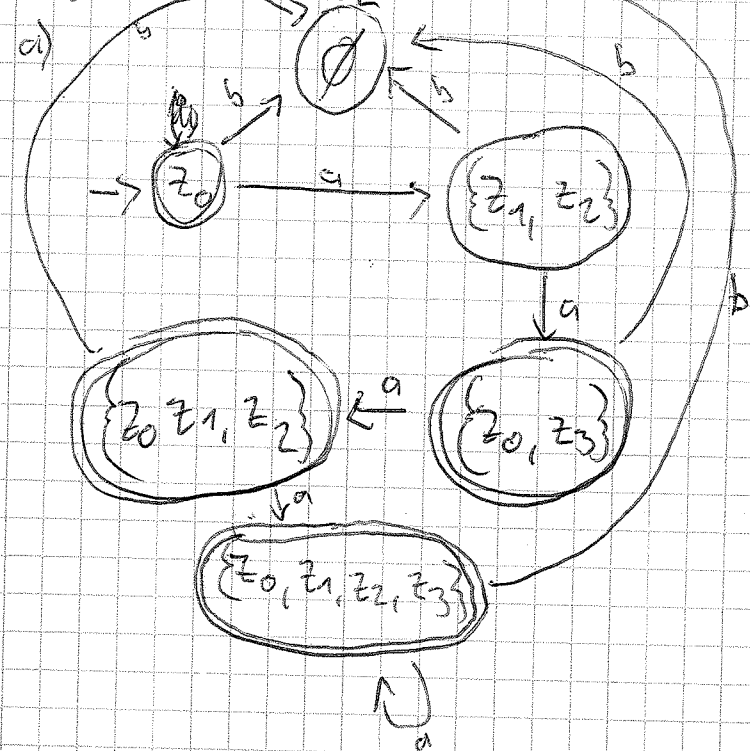
ababab



babbbaaa



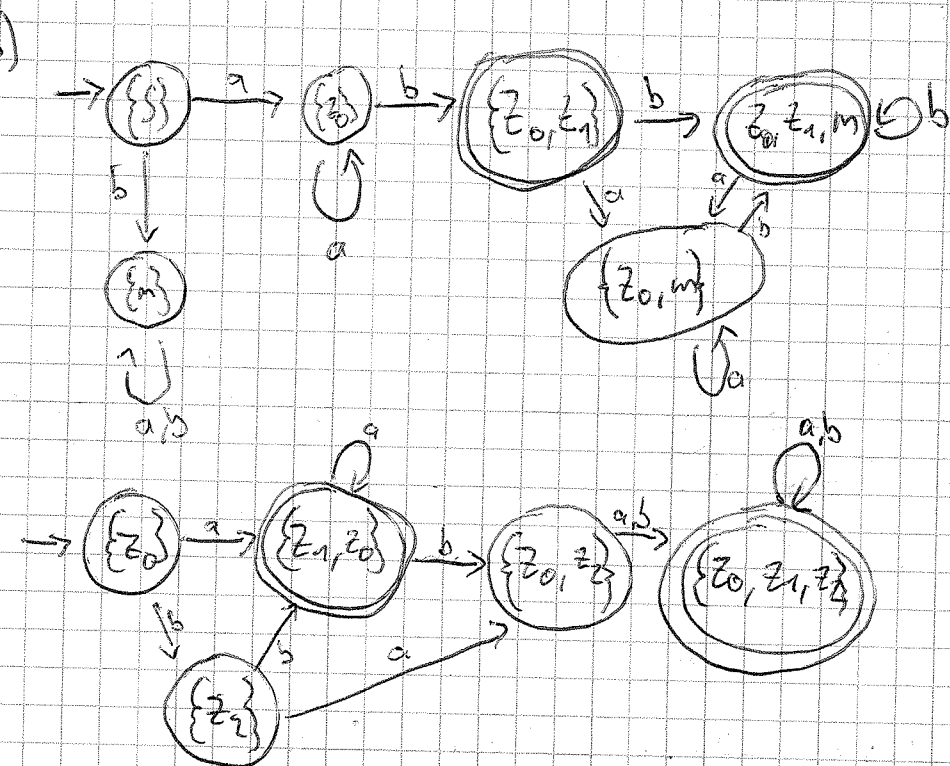
Aufgabe 4:



$$\Sigma = \{a, b\}$$

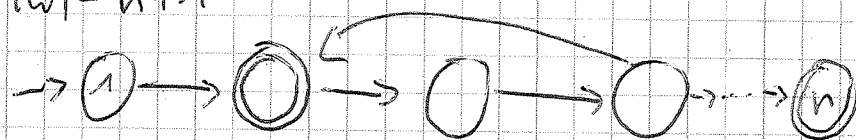
$$Z = \{ \emptyset, \{z_0\}, \{z_1, z_2\}, \{z_0, z_3\}, \{z_0, z_1, z_2\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \}$$

$$F = \{ \{z_0, z_3\}, \{z_0\}, \{z_0, z_1, z_2\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \}$$



Pumping Lemma a

$$|w| = n+1$$



Sei $L \in REG$

Es existiert $n \in \mathbb{N}^+$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ eine Zerlegung

$$w = xyz \text{ mit } |xy| \leq n$$

$$|y| \neq 0$$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad x y^i z \in L$$

Bsp.: $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\} \notin REG$

Angenommen $L \in REG$, dann gilt P.L. für L

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ die Zahl aus dem P.L.

Sei $w = a^n b^n \in L$. Wegen $|xy| \leq n$ und $y \neq \epsilon$

gilt $y = a^k$ f. ein $k \in \mathbb{N}^+$

Es gilt also

$$\begin{cases} w = xyz = a^{n-k} a^k b^n \\ x y^i z \in L \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ sei } i=0 \\ w = x y^0 z = a^{n-k} (a^k)^0 b^n = a^{n-k} b^n \Rightarrow a^{n-k} b^n \in L \\ \Rightarrow n-k \neq n \end{cases}$$

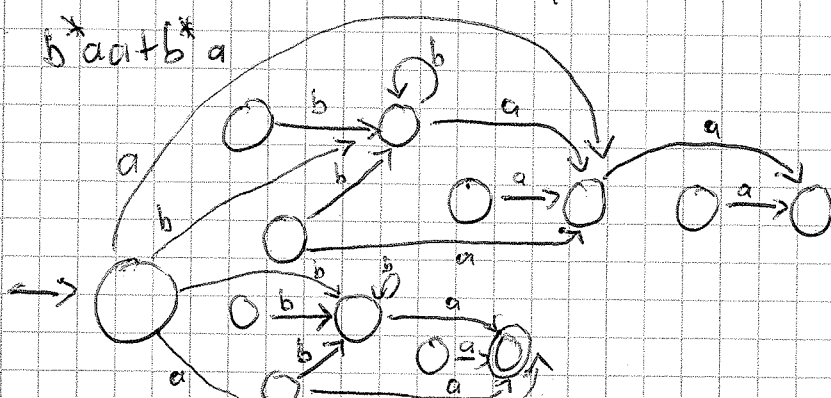
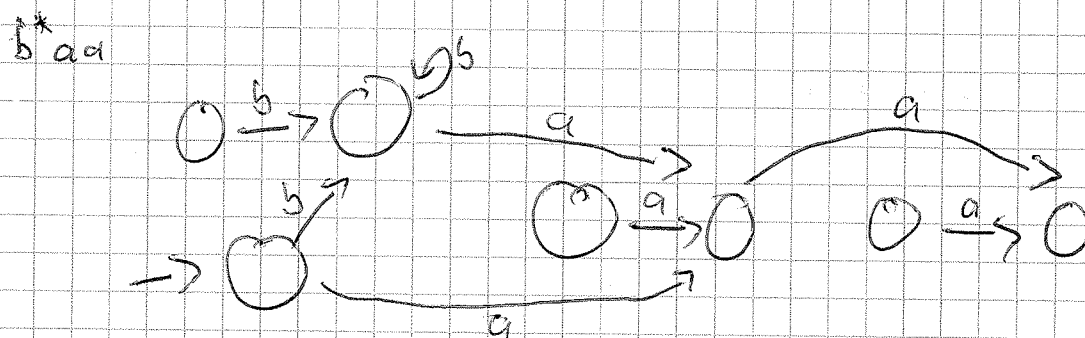
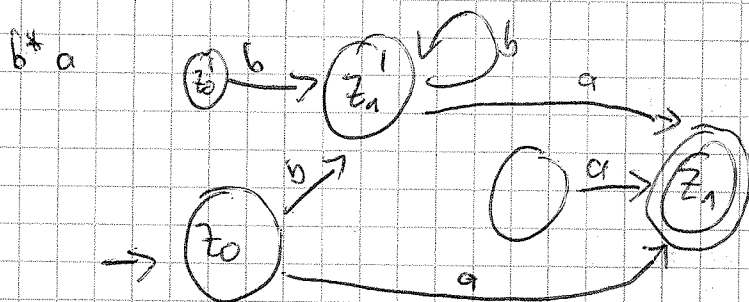
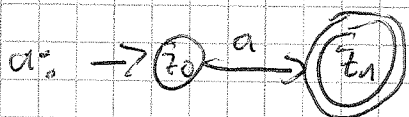
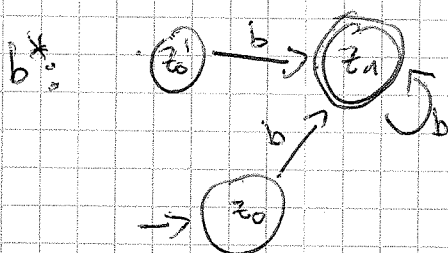
Reguläre Ausdrücke

- $\emptyset, \epsilon, a \in \Sigma$ sind reg. Ausdrücke
- für α, β reg. Ausdruck, dann auch $\alpha + \beta, \alpha^*, \alpha \cdot \beta$

Bsp.:

$b^* a + b^* a a$

~~Handwritten scribbles~~



Graph v. Aufgabe 4 Mitte

$$L_s = a L_s + \cancel{b \cdot L_m}$$

$$L_o = (a+b) L_o + b L_n$$

$$L_1 = \cancel{(a+b) L_m} + \epsilon$$

$$L_m = (a+b) L_m$$

$$= a(a+b)^* b$$

$$= (a+b)^* \cdot b$$

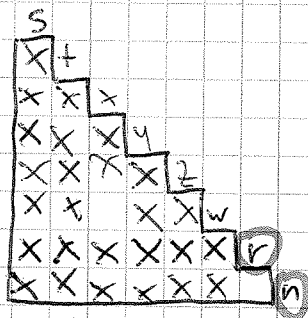
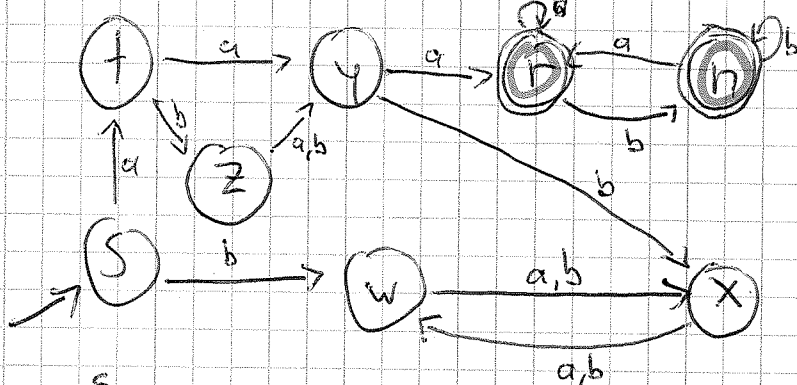
$$= \epsilon$$

$$= (a+b)^* \cdot \cancel{\emptyset} = \cancel{\emptyset}$$

NFA in Reg

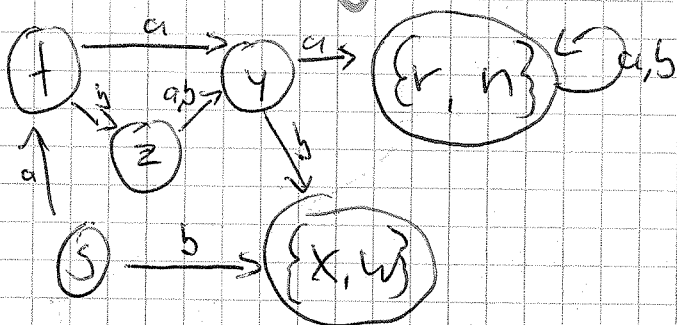
Aufgabe 8:

b) Entferne von 'a' aus un erreichbare Zustände: u, v, p, q



$$[w] = [x]$$

$$[r] = [n]$$



regulärer Ausdruck vom Graphen entnehmen $A \varepsilon$ -rechts

$$L_0 = bL_2 + aL_1 + aL_0$$

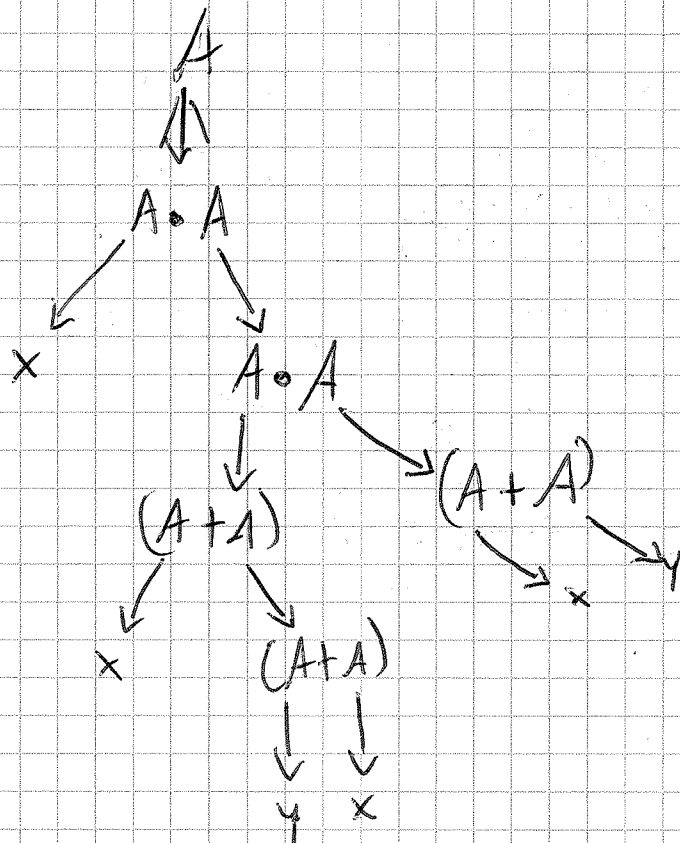
$$L_1 = bL_0 + bL_2 + \varepsilon$$

$$L_2 = aL_2 + bL_1 + (a+b)L_0$$

Siehe Lemma 3.27

$$\Rightarrow a^* ((a+b)L_0 + bL_1)$$

Aufgabe 2



$$\begin{aligned}
 A &\Rightarrow A * A \Rightarrow A * A * A \Rightarrow A * A * (A+A) \Rightarrow A * (A+A) * (A+A) \\
 &\Rightarrow A * (A + (A+A)) * (A+A) \xrightarrow{G} x * (x + (y+x)) * (y+x)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a) $S \rightarrow ASB$

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

Typ L_2

b) Typ $\emptyset$ - Grammatik weil ϵ , aber L_3 -Sprache

c) $S \rightarrow SSSSS$

$S \rightarrow a$

Typ L_2

7. 1, 5, 9,
13, 17, 21, 29

d) $S \rightarrow T$

$S \rightarrow U$

$T \rightarrow TTITT$

$T \rightarrow a$

$U \rightarrow AUB$

$U \rightarrow AB$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

Typ L_2

e) $S \rightarrow 1$

$S \rightarrow AS$

$A \rightarrow 2$

Alternativ:

$S \rightarrow 1$

$S \rightarrow 2S$

Typ 3

Typ L_2

Chomsky-Normalform

1, 5, 13, 29

1: 1

5: 21

13: 221

29: 2221

Aufgabe 6:

a) ~~$S \rightarrow aA$~~

~~$A \rightarrow aA$~~

~~$A \rightarrow bB$~~

~~$A \rightarrow aC$~~

$S \rightarrow a$

$S \rightarrow b$

$S \rightarrow aT$

$T \rightarrow aT$

$T \rightarrow bU$

$U \rightarrow aU$

$U \rightarrow a$

$S \rightarrow bU$

$T \rightarrow a$

a
b
ab
ba
aa
aa
aaa
aba

b) $S \rightarrow b$
 $S \rightarrow a S$
 $S \rightarrow b V$
 $S \rightarrow b W$
 ~~$W \rightarrow a X$~~

$V \rightarrow a S$

b
 ab
 bab
 aab
 $babab$

~~$W \rightarrow a X$~~

$W \rightarrow a Y$

$W \rightarrow a W$

$Y \rightarrow b Z$

$Z \rightarrow a W$

$W \rightarrow a$

$Z \rightarrow a$

c) $G = (\{a\}, \{S\}, S, \emptyset)$ ist vom Typ 3

$L(G) = \emptyset$

d) $L(x) = \{\epsilon\} \neq L(G)$

$L(x) = \{\epsilon\} \cup L(G)$

→ Gibts nicht.
Gehst nicht!

→ $\emptyset$

Aufgabe 1:

b) $L_3 \subsetneq L_2 \subsetneq L_1 \subsetneq L_0$

$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Siehe 3a

$\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

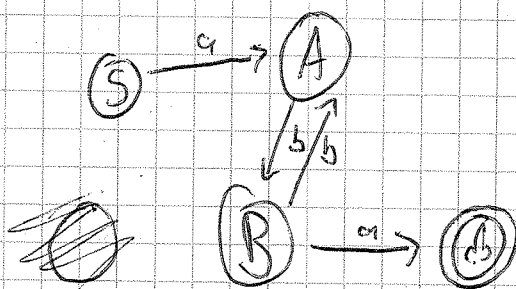
Spezielles
Halteproblem

$K_0 = \{x \mid M_x \text{ hält auf } S \rightarrow aSb\}$

Eingabe $x \rightarrow S \rightarrow aSb$ hält

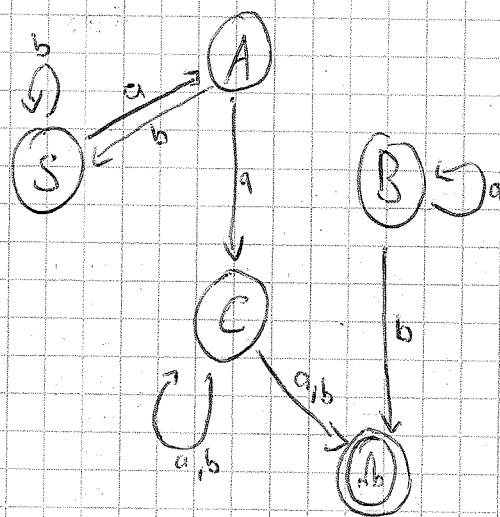
Aufgabe 5:

a)



$M_a = (\{a, b\}, \{A, B, S, ab\}, S, \{ab\})$

b)



Aufgabe 6:

a) Entferne Terminale

$$\begin{aligned} A \rightarrow 01 &\Rightarrow A \rightarrow D_0 D_1 \\ B \rightarrow 111 &\Rightarrow B \rightarrow D_1 D_1 D_1 \\ D \rightarrow 0D &\Rightarrow D \rightarrow D_0 D \end{aligned}$$

$$D_0 \rightarrow 0, D_1 \rightarrow 1$$

Simplifiziere

$$\begin{aligned} D \rightarrow A &\Rightarrow D \rightarrow D_0 D_1 \\ D \rightarrow A &\Rightarrow D \rightarrow ABCD \\ C \rightarrow D &\Rightarrow C \rightarrow D_0 D \\ &\Rightarrow C \rightarrow D_0 D_1 \\ &\Rightarrow C \rightarrow ABCD \end{aligned}$$

Ersetze

$$A \rightarrow ABCD \Rightarrow A E_2$$

$$\begin{aligned} E_2 &\rightarrow BE_1 \\ E_1 &\rightarrow CD \end{aligned}$$

$$C \rightarrow ABCD \Rightarrow A E_2$$

$$B \rightarrow D_1 D_1 D_1 \Rightarrow D_1 E_3$$

$$E_3 \rightarrow D_1 D_1$$

Aufgabe 10

a) $R' = \{ S \rightarrow VS, S \rightarrow E, VE \rightarrow AE, VA \rightarrow AAV, E \rightarrow A, A \rightarrow a \}$

ersetze $VA \rightarrow AAV$ durch $VA \rightarrow VAV$ $VA \rightarrow VA$

$$\begin{aligned} D_1 A &\rightarrow D_1 D_2 \\ D_1 D_2 &\rightarrow A A D_2 \\ A A D_2 &\rightarrow A A V \end{aligned}$$

Aufgabe 9

b) $\{ ab^n c^{2n} a \mid n \in \mathbb{N} \}$

$$z_0 a \boxed{\cdot} \rightarrow z_1 \boxed{\cdot}$$

$$z_1 b \boxed{\cdot} \rightarrow z_1 \otimes \otimes \boxed{\cdot}$$

$$z_1 b \otimes \rightarrow z_1 \otimes \otimes \otimes$$

$$z_1 c \otimes \rightarrow \epsilon$$

$$z_2 c \otimes \rightarrow \epsilon$$

$$z_2 a \boxed{\cdot} \rightarrow \epsilon$$

$$z_1 a \boxed{\cdot} \rightarrow \epsilon$$

Aufgabe 10

b) Terminals k\u00f6nnen.

Neue Regel: $\neg \rightarrow a$

$$\Rightarrow AB \rightarrow \neg BA$$

~~AE~~

$$AE \rightarrow E \neg$$

$$A \neg \rightarrow \neg A$$

$$X \neg \rightarrow \neg X$$

$$XB \rightarrow \neg \neg \neg X$$

$$XE \rightarrow \neg \neg \neg \neg$$

$$[AB \rightarrow \neg BA]$$

$$AB \rightarrow D_1 B$$

$$D_1 B \rightarrow D_1 D_2$$

$$D_1 D_2 \rightarrow \neg B D_2$$

$$\neg B D_2 \rightarrow \neg BA$$

$$[XE \rightarrow \neg \neg \neg \neg]$$

$$XE \rightarrow D_3 E$$

$$D_3 E \rightarrow D_3 D_4$$

$$D_3 D_4 \rightarrow \neg \neg D_4$$

$$\neg \neg D_4 \rightarrow \neg \neg \neg \neg$$